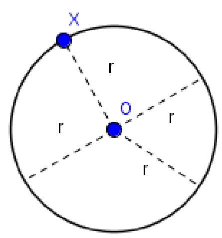
CAPITULO I: Geometría Analítica

Los círculos y las circunferencias son figuras geométricas que aparecen constantemente en nuestro entorno, debido a esto, es de mucha utilidad conocer sus propiedades para resolver problemas. Además, como veremos su naturalidad viene directamente del concepto de distancia, elemental en la geometría.

De manera general, se analizarán algunas características desde un enfoque clásico, pero luego, buscaremos un enfoque más analítico, que es sin duda el más utilizado en matemática superior. Así mismo, profundizaremos el trabajo con respecto a rectas que ha empezado desde octavo año, ahora analizando el paralelismo y la perpendicularidad de estas.

A. Circunferencia y fórmulas básicas

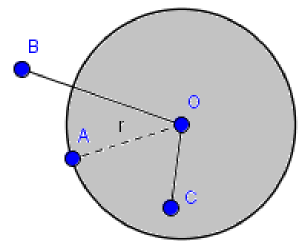
Una **circunferencia** es el conjunto de puntos del plano que están a una misma distancia r de un punto O, llamado **centro** de la circunferencia.



El segmento que une a O con cualquier punto de la circunferencia se llama **radio.** Además, al valor r también se le llama radio. En la figura, $\overline{OX}$ es un radio, y $OX = r$.

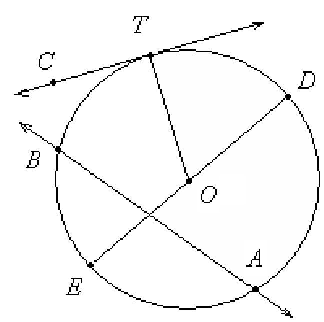
El **interior de una circunferencia** es el conjunto de puntos que están a una distancia menor que el radio del centro. Los puntos que pertenecen al interior se llaman **puntos interiores.**

Además, el **círculo** es la unión de la circunferencia con su interior. El **exterior de la circunferencia** es el conjunto de puntos que están a una distancia mayor que el radio del centro. Los puntos que pertenecen al exterior se llaman **puntos exteriores.**



En la figura, se ha representado la circunferencia con centro O y radio r. Se cumple que C es un punto interior. Tanto P como C pertenecen al círculo y B es un punto exterior.

Una **cuerda** es el segmento que une dos puntos de la circunferencia.



En la figura, $\overline{AB}$ es una cuerda, mientras que si prolongamos una cuerda obtenemos una **secante** $\overleftrightarrow{AB}$. Es decir, una secante es una recta que pasa por dos puntos de la circunferencia.

Una **tangente** es una recta que pasa por exactamente un punto de la circunferencia. Ese punto se llama **punto de tangencia.**

Por ejemplo, en la figura de la página anterior $\overleftrightarrow{CT}$ es una tangente cuyo punto de tangencia es T.

El **diámetro** es una cuerda que pasa por el centro (y por lo tanto, la cuerda de mayor longitud). En la figura, $\overline{DE}$ es un diámetro.

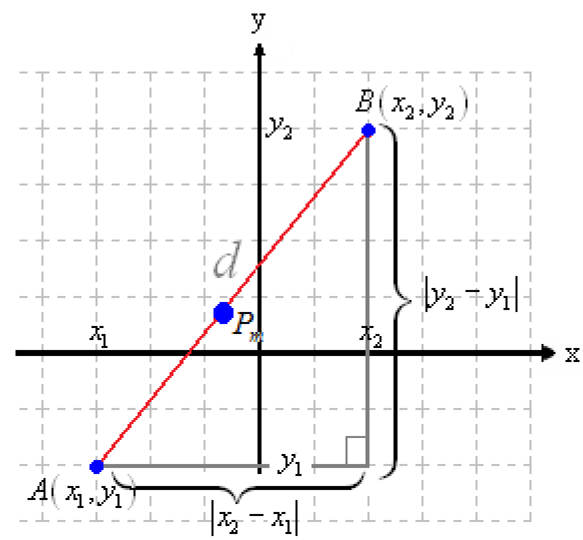
Dos propiedades importantes de cualquier figura plana cerrada son su perímetro y su área.

> Para calcular el **área** de un círculo se utiliza la fórmula $A = r^2\pi$, mientras que para calcular la **longitud de una circunferencia** se utiliza $C = 2r\pi$ o bien $C = d\pi$, donde r es el radio de la circunferencia y d es la medida del diámetro.

EJEMPLO 1. **En un círculo de área $12\pi\ m^2$, calcule la longitud de la circunferencia.**

Ahora trabajaremos en el plano cartesiano. Primero, retomamos dos fórmulas básicas de geometría analítica que necesitaremos en este capítulo.

> Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano.
>
> La **distancia** entre A y B, denotada AB es la longitud del segmento $\overline{AB}$ y se calcula con la fórmula
>
> $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
>
> El **punto medio** entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es: $P_m = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$



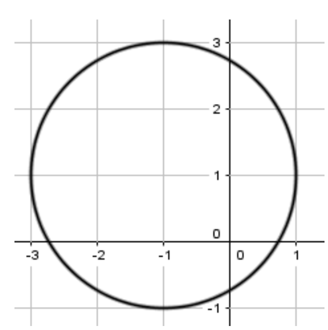
EJEMPLO 2. **Encuentre la distancia y el punto medio entre los puntos $A(-4, -2)$ y $B(-5, 4)$.**

Por último, dibujamos circunferencias en el plano cartesiano.

EJEMPLO 3. **El punto $(-2, 3)$ pertenece a la circunferencia de centro $(1, 0)$. ¿Cuál es el área de ese círculo?**

EJEMPLO 4. **Representе gráficamente la circunferencia con centro en $O(1, 2)$ de radio 5.**

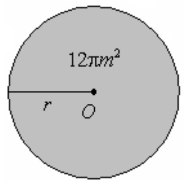
EJEMPLO 5. **¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia mostrada a continuación?**



Soluciones A.

EJEMPLO 1: En un círculo de área $12\pi\ m^2$, calcule la longitud de la circunferencia.

Si el área es $12\pi\ m^2$, entonces:



$\pi r^2 = 12\pi \Rightarrow r^2 = \frac{12\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} \Rightarrow r = \pm\sqrt{12}$.

Como $r > 0 \Rightarrow r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}m$.

Para calcular la circunferencia:

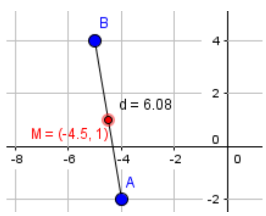
$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\pi\ m$.

EJEMPLO 2: Encuentre la distancia y el punto medio entre los puntos $A(-4,-2)$ y $B(-5,4)$.

Aplicando la fórmula con $\left(\underbrace{-4}_{x_1},\underbrace{-2}_{y_1}\right)$ y $\left(\underbrace{-5}_{x_2},\underbrace{4}_{y_2}\right)$

obtenemos: $d = \sqrt{[-5-(-4)]^2 + [4-(-2)]^2}$.

Simplificando $d = \sqrt{(-1)^2 + (6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}ul$.



Luego, el punto medio es $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{-4+(-5)}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = \left(\frac{-9}{2}, 1\right)$.

EJEMPLO 3: El punto $(-2,3)$ pertenece a la circunferencia de centro $(1,0)$. ¿Cuál es el área de ese círculo?

El radio es la distancia entre esos puntos:

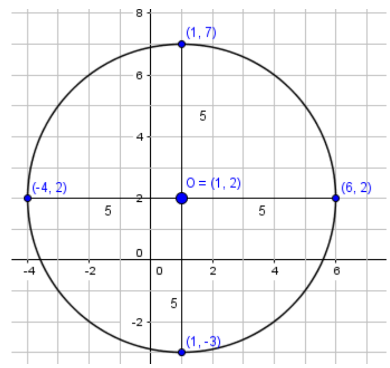
$r = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{18}$.

Luego, el área es $A = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{18}\right)^2 = 18\pi$.

EJEMPLO 4: Represente gráficamente la circunferencia con centro en $O(1,2)$ de radio 5.

El procedimiento usual sería primero ubicar el centro, y luego encontrar algunos puntos que disten 5.

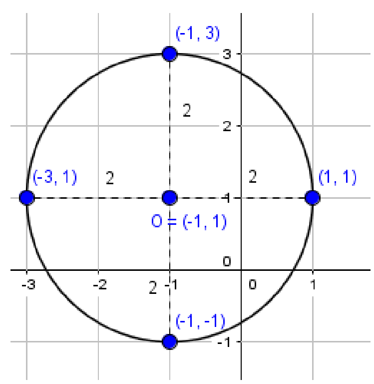
Por lo general, es fácil moverse en líneas sobre la cuadrícula (líneas paralelas a los ejes) para encontrarlos. Después, se dibuja la circunferencia.



EJEMPLO 5: ¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia mostrada a continuación?

El centro es la intersección de dos diámetros. Los trazamos notando que en la circunferencia hay dos que se encuentran sobre la cuadrícula.

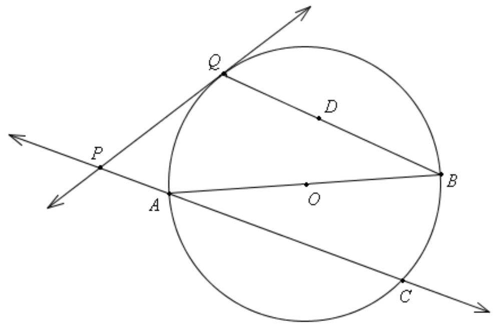
Luego, el radio es la distancia del centro a cualquier punto.



Así, $O(-1,1)$ y el radio es 2.

Ejercicio A.

I PARTE: Con base en la siguiente circunferencia de centro O, complete el nombre del concepto geométrico representado.



1. P
2. Q
3. D
4. $\overline{AC}$
5. $\overleftrightarrow{AC}$
6. $\overline{AB}$
7. $\overrightarrow{PQ}$
8. $\overline{QB}$
9. $\overline{OQ}$
10. $\overline{AO}$

II PARTE: Calcule el área y la longitud de la circunferencia si el radio es:

1. $4cm$
2. $\frac{5}{4}m$
3. $\sqrt{6}\,m$
4. $3\sqrt{2}\,cm$

III PARTE: Con base en la siguiente información, dibuje una circunferencia de centro O y los siguientes elementos:

a) $\overline{DE}$ es un diámetro.

b) $\overleftrightarrow{AP}$ es una secante.

c) J un punto interior.

d) $\overline{AF}$ es una cuerda.

e) $\overleftrightarrow{CB}$ es tangente a la circunferencia en Q.

f) $O-Q-T$ y $QT = DE$.

IV PARTE: Resuelva los siguientes problemas.

1. Si el área de un círculo es $\frac{16\pi}{9}cm^2$ ¿Cuánto mide la longitud de la circunferencia?

2. En una circunferencia de longitud π, ¿cuánto es el área del círculo?

3. Encuentre la medida exacta del radio de un círculo de área $20cm^2$.

4. Con ayuda de una calculadora, aproxime el área de un círculo cuya circunferencia mide $2\sqrt{3}\,cm$.

5. Exprese el área de un círculo en términos de la longitud de su circunferencia. Para esto, despeje el radio en la fórmula de circunferencia y sustitúyalo en la fórmula de área. Simplifique.

6. El diámetro de una circunferencia mide $(x+3)cm$ y el área es $16\pi\ cm^2$. Calcule el valor de x.

7. Sea P un punto de la circunferencia de centro O y radio $12cm$. Si $O-P-Q$ y $OQ=3QP$, calcule QP.

8. Sea Q un punto de la circunferencia de centro O. Si $QP=x,\ OP=10cm$ donde $O-Q-P$, encuentre el área del círculo en términos de x.

9. ¿En qué proporción aumenta la longitud de una circunferencia cuando se duplica el radio? ¿Y el área?

10. Encuentre los puntos que están a una distancia de $5ul$ del punto $(4,3)$ tal que su coordenada en y es 2.

11. Encuentre los puntos que están a una distancia de $7ul$ del punto $(-4,2)$ tal que su coordenada en x es 1.

12. Encuentre los puntos donde la circunferencia de centro $(-2,1)$ y radio 4 interseca el eje de las ordenadas (es decir, los puntos de la forma $(0,y)$ que pertenecen a esa circunferencia).

13. El punto $(1,4)$ pertenece a la circunferencia de centro $(-3,2)$. ¿Cuál es el área de ese círculo?

14. Encuentre el área del círculo con centro $O(-2,3)$, sabiendo que el punto $A(-5,6)$ pertenece a la circunferencia.

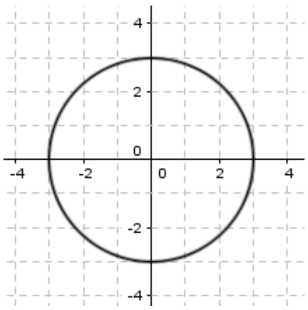
15. Si $A(-4,2)$, $B(-2,-2)$, $C(4,0)$ y $D(0,2)$.

    Encuentre el área y el perímetro del cuadrilátero $ABCD$.

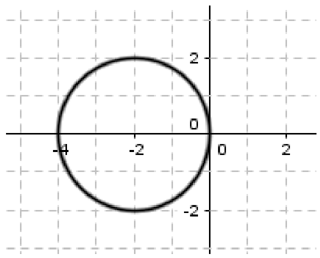
16. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son $(-4,0)$ y $(0,2)$. Encuentre el perímetro y el área del cuadrado.

V PARTE: Encuentre el centro y la medida del radio de las siguientes circunferencias:

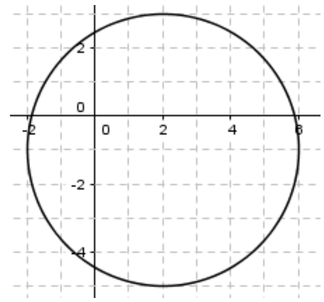
1.



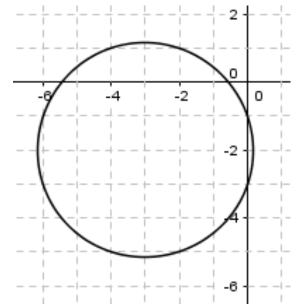
2.



3.



4.



VI PARTE: Represente gráficamente las circunferencias dados los elementos descritos.

1. El centro es el origen de coordenadas el radio mide 2.

2. El centro es $(1,2)$ y el radio mide 3.

3. El centro es $(3,-4)$ y el radio mide 4.

4. El centro es $(-2,-5)$ y el radio 2.

5. El centro es el origen de coordenadas y pasa por $(1,3)$.

6. Un diámetro es $\overline{AB}$ donde $A(-4,-2)$ y $B(2,6)$.

7. Un diámetro es $\overline{AB}$ donde $A(1,3)$ y $B(-1,5)$.

8. El centro es el origen y pasa por $(-2,2)$.

VII PARTE: Un colegio tiene dimensiones $400m \times 600m$ y tiene un mapa representado en un plano cartesiano, donde $-6 \leq x \leq 6$, y $-4 \leq y \leq 4$ donde cada unidad representa 50 metros. En el punto $(1,2)$ está el patio donde se ubicará una alarma de incendios que, según las instrucciones, se escucha claramente a 300 metros a la redonda.

1. Elabore una representación gráfica de la situación.

2. Explique por qué la alarma no se escucha en todo el colegio.

3. El laboratorio de Informática se ubica en el punto $(-3,-2)$. ¿La alarma se podría escuchar claramente estando en el laboratorio?

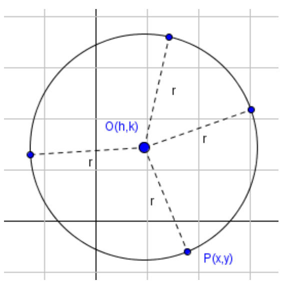
4. Explique por qué no es posible colocar la alarma en algún lugar de manera que se pueda escuchar en todo el colegio.

- La **ecuación de la circunferencia** de centro (h,k) y radio r es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

B. Ecuación de la circunferencia

Partiendo de la definición de circunferencia, si el centro tiene coordenadas $O(h,k)$ y el radio es r, entonces, un punto arbitrario $P(x,y)$ pertenece a la circunferencia si y sólo si: $OP=r$. De la fórmula de distancia, $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$, y por ser todos positivos, esto equivale a $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

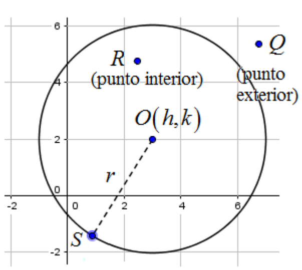
Los puntos $P(x,y)$ que pertenecen a la **circunferencia** de centro $O(h,k)$ son los que satisfacen $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.



Notemos que esta ecuación podría expresarse distinto al desarrollar las fórmulas notables, además, si está simplificada, podría ser necesario completar cuadrrados para leer el centro y el radio.

EJEMPLO 6. Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en $(-2,1)$ y radio 4.

Las definiciones que dimos en la sección A, conservan su significado, pero difieren en el enfoque en que los manejamos: por ejemplo, para verificar que un punto es interior, o exterior debe evaluarse la fórmula de distancia con el punto y el centro de la circunferencia.



Considere una circunferencia C de centro $O(h,k)$ y radio r y un punto $P(x,y)$, al calcular $OP^2=(x-h)^2+(y-k)^2$, tenemos que:

- Si $OP^2=r^2$, entonces, P **pertenece** a C.
- Si $OP^2>r^2$, entonces, P es **exterior** a C.
- Si $OP^2<r^2$, entonces, P es **interior** a C.

EJEMPLO 7. Para $(x-1)^2+(y-1)^2=4$, verifique la posición de $A(2,3); B(-1,1); C(1,2)$.

EJEMPLO 8. En la circunferencia con ecuación $x^2-2x+y^2=0$, encuentre el centro y el radio.

EJEMPLO 9. $(-2,-6)$ y $\left(4,\frac{1}{2}\right)$ son extremos de un diámetro de una circunferencia. Encuentre:

a) Las coordenadas del centro.

b) La medida del radio.

c) La ecuación de la circunferencia.

Por último, describimos cómo cambia la ecuación de una circunferencia al trasladarla.

Cuando tenemos una circunferencia de ecuación $(x-k)^2+(y-h)^2=r^2$, el resultado de trasladarla en dirección (a,b) es la circunferencia con ecuación $(x-k-a)^2+(y-h-b)^2=r^2$.

EJEMPLO 10. Considere la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-6y=0$. Encuentre la ecuación de la circunferencia que resulta de trasladarla dos unidades hacia la derecha y cuatro hacia abajo.

Soluciones B.

EJEMPLO 6: Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en $(-2,1)$ y radio 4.

De acuerdo con la ecuación de la circunferencia:

$$\left[x-(-2)\right]^2+(y-1)^2=4^2\Rightarrow(x+2)^2+(y-1)^2=16.$$

Es posible expandir el lado izquierdo como otra manera de escribir la ecuación:

$$x^2+4x+4+y^2-2y+1=16\Rightarrow x^2+4x+y^2-2y=11.$$

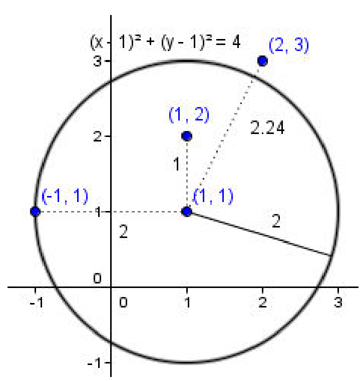
EJEMPLO 7: Para $(x-1)^2+(y-1)^2=4$, verifique la posición de:

$A(2,3)$**:** Calculamos la distancia entre A y $O(1,1)$:

$d^2=(2-1)^2+(3-1)^2=5>4\Rightarrow A$ es exterior.

$B(-1,1)$**:** $d^2=(-1-1)^2+(1-1)^2=4$, por lo que B está sobre la circunferencia.

$C(1,2)$**:** $d^2=(1-1)^2+(2-1)^2=1<4\Rightarrow C$ es interior.



EJEMPLO 8: En la circunferencia con ecuación $x^2-2x+y^2=0$, encuentre el centro y el radio.

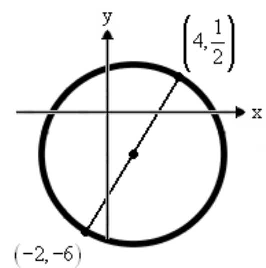
Debemos reescribir la ecuación para verla en su forma general. Por lo general, esto se hace "completando el cuadrado": Al agrupar las x, tenemos que sumar a ambos lados de la ecuación un uno para completar la fórmula notable: $x^2-2x+y^2=0$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1$$

Así, vemos que el centro es $O(1,0)$ y el radio 1.

- En general, para completar el cuadrado de la expresión ax^2+bx se debe sumar a ambos lados de la ecuación $\frac{b^2}{4a}$ de manera que de un lado se pueda factorizar $ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ y al otro se realiza la operación correspondiente.

EJEMPLO 9: $(-2,-6)$ y $\left(4,\frac{1}{2}\right)$ son los extremos del diámetro de una circunferencia. Encuentre:



a) Las coordenadas del centro.

El centro de la circunferencia es el punto medio de los extremos del diámetro. Aplicando la fórmula del punto medio tenemos: $O=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{-6+1/2}{2}\right)=\left(1,\frac{-11}{4}\right)$.

b) La medida del radio.

El radio es la distancia de O a cualquier punto de la circunferencia, en particular a $(-2,-6)$:

Aplicando la fórmula de distancia:

$$r=\sqrt{(-2-1)^2+\left[-6-\left(\frac{-11}{4}\right)\right]^2}=\sqrt{\frac{313}{16}}=\frac{\sqrt{313}}{4}ul.$$

c) La ecuación de la circunferencia.

Tenemos que $(x-1)^2+\left(y+\frac{11}{4}\right)^2=\frac{313}{16}$.

EJEMPLO 10: Considere la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-6y=0$. Encuentre la ecuación de la circunferencia que resulta de trasladarla dos unidades hacia la derecha y cuatro hacia abajo.

Primero completamos el cuadrado en y en la ecuación para expresarla en forma canónica y leer el centro y el radio:

Como $\frac{b^2}{4a}=\frac{(-6)^2}{4}=9$, entonces, $x^2+y^2-6y+9=0+9 \Rightarrow x^2+(y-3)^2=9$, de donde el centro es $O(0,3)$ y el radio 3. Ahora, la dirección de la traslación es $(2,-4)$ por lo que la ecuación resultante es:

$(x-2)^2+(y-3-(-4))^2=9$, es decir, $(x-2)^2+(y+1)^2=9$.

Ejercicio B.

I PARTE: Encuentre la ecuación de la circunferencia con el centro y el radio dado. Desarrolle las fórmulas notables y simplifique.

1. $O(0,0)$ y $r=2$
2. $O(-2,5)$ y $r=\sqrt{2}$
3. $O(0,3)$ y $r=2\sqrt{3}$
4. $O(-5,-3)$ y $r=\frac{1}{3}$
5. $O(2,4)$ y $r=3$
6. $O(\sqrt{2},-1)$ y $r=1+\sqrt{2}$
7. $O(0,a)$ y $r=a$
8. $O(a,b)$ y $r=\sqrt{a^2+b^2}$

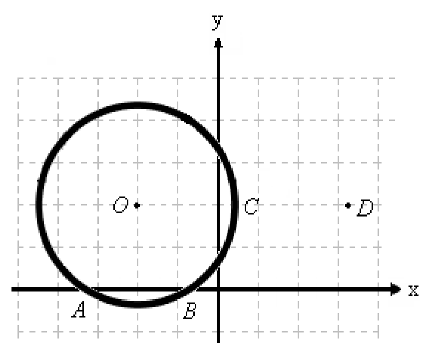
II PARTE: Considere la circunferencia de ecuación $(x+3)^2+(y-1)^2=5$. Clasifique los siguientes puntos como puntos interiores, exteriores o sobre la circunferencia.

1. $A(-2,3)$
2. $C(-4,3)$
3. $B(0,0)$
4. $D\left(\frac{-5}{2},2\right)$
5. $E(-1,3)$
6. $F(\sqrt{5}-3,1)$
7. $G(-2,1)$
8. $H(3,2)$

III PARTE: Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyos extremos del diámetro son las siguientes parejas de puntos:

1. $A(-3,4);\ B(-3,-4)$
2. $C(1,5);\ D(7,5)$
3. $A(-3,7);\ B(2,-5)$
4. $C(4,3);\ D(7,-2)$

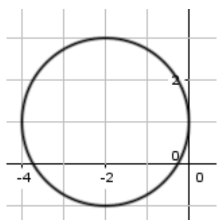
IV PARTE: *RETO: Considere el siguiente plano cartesiano, donde la circunferencia tiene centro $O(-2,2)$ y pasa por el punto $B(-1,0)$.



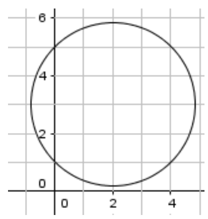
1. Encuentre la medida del radio.
2. Escriba la ecuación de la circunferencia.
3. Encuentre el punto A sabiendo que está sobre el eje x.
4. Encuentre la coordenada en x del punto $C(x,2)$.
5. Encuentre las coordenadas del punto medio de $\overline{BC}$.
6. Si C es el punto medio de $\overline{OD}$, encuentre las coordenadas de D.
7. Calcule la distancia $\overline{OD}$.
8. Calcule la distancia $\overline{AD}$.

V PARTE: Encuentre la ecuación de la circunferencia mostrada en cada figura:

1.



2.



VI PARTE: Represente gráficamente las circunferencias cuyas ecuaciones están mostradas a continuación:

1. $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

2. $(x+2)^2+(y+3)^2=10$

3. $x^2+6x+y^2=-5$

4. $x^2+12x+y^2+4y=0$

VII PARTE: En cada uno de los siguientes ejercicios se da la ecuación de una circunferencia, escriba la ecuación de la circunferencia que resulta de aplicar la traslación descrita:

Circunferencia	Traslación
1. $x^2+y^2=1$	Que el centro sea $(1,2)$.
2. $(x+1)^2+y^2=4$	Dos unidades hacia arriba.
3. $x^2+y^2-6y=0$	Tres unidades hacia la izquierda.
4. $x^2+y^2-12y=0$	Correspondiente a $(x-1,y+2)$.
5. $(x-3)^2+(y+2)^2=4$	Correspondiente a $(x+2,y-1)$.
6. $x^2+2x+y^2-12y=0$	Cinco unidades hacia la derecha y seis unidades hacia abajo.
7. $x^2-6x+y^2+4y=12$	Que el centro sea $(-4,7)$.
8. $(x-4)^2+y^2+2y=4$	Cuatro unidades hacia la izquierda y media unidad hacia arriba.

VIII PARTE: Para cada una de las siguientes ecuaciones de circunferencias complete los cuadrados para encontrar el centro y el radio:

1. $x^2+y^2+2y=0$

2. $x^2-10x+y^2=24$

3. $x^2+6x+y^2-8y=0$

4. $x^2-4x+y^2+6y=108$

5. $x^2-x+y^2=\frac{3}{4}$

6. $x^2+y^2-\frac{4y}{3}=\frac{32}{9}$

7. $x^2-\frac{x}{2}+y^2+y=\frac{59}{16}$

8. $x^2+x+y^2+\frac{2y}{3}=\frac{1}{12}$

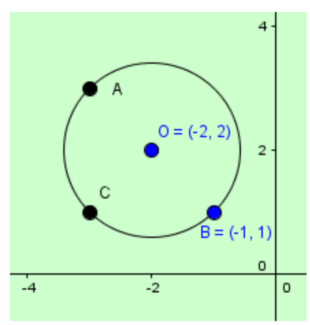
9. $4x^2-4x+4y^2+4y=-1$

10. $4x^2+4y^2-4y=11$

11. $9x^2-6x+9y^2=44$

12. $20x^2-8x+20y^2-4y=19$

IX PARTE: En el siguiente dibujo se representó una manguera automática que riega mientras gira un jardín. Está situada en $(-2,2)$. El punto $(-1,1)$ está en el límite donde llega el agua. Cada unidad representa un metro.

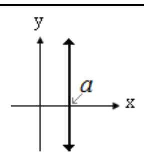
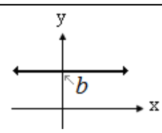
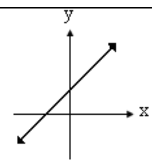
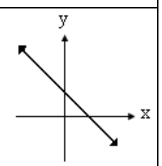


1. Encuentre el radio de la circunferencia que describe el alcance del agua.
2. Encuentre la ecuación de la circunferencia que describe el alcance del agua.
3. Utilice la ecuación para encontrar la coordenada en y, de los puntos donde $x=-3$.
4. Suponga que la manguera se mueve dos unidades a la derecha y una hacia arriba. Encuentre la ecuación de la nueva circunferencia que describe el alcance del agua.
5. En esa nueva posición, ¿el agua llega hasta una planta situada en $(1,2)$?

- Las **rectas en el plano** se pueden representar mediante la **forma pendiente intersección** $y = mx + b$ o mediante la **forma estándar** $Ax + By + C = 0$

C. Ecuación de la recta

Tenemos los siguientes casos para la representación algebraica de una recta:

Recta **vertical**	Recta **horizontal**	Recta **creciente**	Recta **decreciente**
			
$x = a$	$y = b$ $m = 0$	$y = mx + b$ $m > 0$	$y = mx + b$ $m < 0$

Exceptuando el primer caso, podemos escribir de manera general $y = mx + b$, donde m se llama **pendiente de la recta,** y mide cuánto aumenta "y" cada vez que aumenta "x" en una unidad. Esta manera de escribir la recta se llama **pendiente – intersección,** pues b es la intersección de la recta con el eje y.

Otra manera de expresar la ecuación de una recta es la que llamamos **forma estándar** y esta consiste en eliminar los denominadores y escribir la ecuación igualada a 0, es decir, $Ax + By + C = 0$

Forma estándar de la ecuación de una recta: $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$

EJEMPLO 11. Exprese la ecuación $y = \frac{4x}{5} - 3$ **en forma estándar.**

EJEMPLO 12. ¿Cuál es la pendiente de la recta con ecuación $-12x - 10y + 4 = 0$**?**

EJEMPLO 13. Encuentre el valor de k **de manera que la recta con ecuación** $kx - 3y + 2 = 0$ **pase por** $(1,3)$**.**

EJEMPLO 14. Para la recta con ecuación $4x - 6y + 12 = 0$**, encuentre las intersecciones con los ejes.**

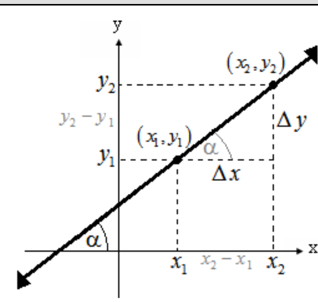
EJEMPLO 15. Encuentre el valor de k **de manera que la recta con ecuación** $kx + x - 2y + 3 = 0$ **tenga pendiente igual a** -2**.**

EJEMPLO 16. Encuentre las ecuaciones de la recta vertical y horizontal que pasan por $(-3,5)$**.**

Para encontrar la **intersección con el eje y** "b" dada la pendiente y un punto, se sustituye los valores de m y las coordenadas de un punto en la ecuación $y = mx + b$.

EJEMPLO 17. Encuentre la ecuación de la recta de pendiente $2/5$ **y pasa por** $(-1,3)$**.**

Para encontrar la **pendiente** "m" dados dos puntos:
Si los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la recta con ecuación $y = mx + b$ entonces, se puede calcular m mediante la fórmula $\boldsymbol{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$.



EJEMPLO 18. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $\left(3/2, -2/5\right)$ **y** $\left(-3/2, 7/5\right)$**.**

EJEMPLO 19. Encuentre las intersecciones con los ejes de la recta que pasa por $(2,6)$ **y** $(-1,-6)$**.**

Soluciones C.

EJEMPLO 11: Exprese la ecuación $y = \frac{4x}{5} - 3$ en forma estándar.

Al expresar con denominador común: $y = \frac{4x-15}{5}$

Ahora, igualamos a 0 de la siguiente manera: $5y = 4x - 15 \Rightarrow -4x + 5y + 15 = 0$.

EJEMPLO 12: ¿Cuál es la pendiente de la recta con ecuación $12x - 10y + 4 = 0$?

Para responder la pregunta primero debemos expresar la ecuación en forma de pendiente – intersección. Despejando y : $-10y = 12x - 4 \Rightarrow y = \frac{12x-4}{-10}$.

La pendiente es $m = \frac{12}{-10} \Rightarrow m = \frac{-6}{5}$.

EJEMPLO 13: Encuentre el valor de k de manera que la recta con ecuación $kx - 3y + 2 = 0$ pase por $(1,3)$.

Si la recta pasa por el punto $(1,3)$, entonces ese punto satisface la ecuación $kx - 3y + 2 = 0$.

Sustituyendo tenemos:

$k(1) - 3(3) + 2 = 0 \Rightarrow k - 9 + 2 = 0 \Rightarrow k = 7$.

EJEMPLO 14: Para la recta con ecuación $4x - 6y + 12 = 0$ encuentre las intersecciones con los ejes.

Para encontrar las intersecciones con los ejes de cualquier curva, en este caso la recta, sustituimos los valores $x = 0$ o $y = 0$ en la ecuación, según corresponda.

Para el eje x:

$y = 0 \Rightarrow 4x - 6 \cdot 0 + 12 = 0 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$

Para el eje y:

$x = 0 \Rightarrow 4 \cdot 0x - 6y + 12 = 0 \Rightarrow -6y = 12 \Rightarrow y = -2$

Así, las intersecciones con los ejes son los puntos $(3,0)$ y $(0,-2)$.

EJEMPLO 15: Encuentre el valor de k de manera que la recta con ecuación $kx + x - 2y + 3 = 0$ tenga pendiente igual a -2.

Debemos encontrar, en términos de k, la pendiente de la recta dada. Luego, debemos igualar ese expresión a -2 para encontrar el valor de k.

Despejando la y de la ecuación,

$kx + x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow kx + x + 3 = 2y \Rightarrow$

$y = \frac{kx + 1x + 3}{2} = \frac{(k+1)x + 3}{2} \Rightarrow m = \frac{k+1}{2}$

Igualando el resultado tenemos:

$\frac{k+1}{2} = -2 \Rightarrow k + 1 = -4 \Rightarrow k = -5$.

- En este ejemplo debe quedar claro que puede haber varios términos que tengan x y todos ellos forman parte de la pendiente. Por ejemplo, en $y = 2 - 3x + \sqrt{2}x$ la pendiente es $-3 + \sqrt{2}$.

EJEMPLO 16: Encuentre las ecuaciones de la recta vertical y horizontal que pasan por $(-3,5)$.

La recta vertical debe tener ecuación $x = -3$ y la recta horizontal $y = 5$.

EJEMPLO 17: Encuentre la ecuación de la recta que tiene pendiente $\frac{2}{5}$ y pasa por $(-1,3)$

En este caso, tenemos que $m=\frac{2}{5}$ y para encontrar b, sustituimos los datos del punto $(-1,3)$ y el valor de m en la ecuación de la recta así:

$$y=mx+b \Rightarrow 3=\left(\frac{2}{5}\right)(-1)+b \Rightarrow 3=\frac{-2}{5}+b$$

$\Rightarrow b=3+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$. Entonces, la ecuación de la recta es $y=\frac{2}{5}x+\frac{17}{5}$ que podemos expresar $y=\frac{2x+17}{5}$.

EJEMPLO 18: Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $\left(\frac{3}{2},\frac{-2}{5}\right)$ y $\left(\frac{-3}{2},\frac{7}{5}\right)$.

Para encontrar m nombramos los puntos de la siguiente manera: $\left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{x_1},\underbrace{\frac{-2}{5}}_{y_1}\right)$ y $\left(\underbrace{\frac{-3}{2}}_{x_2},\underbrace{\frac{7}{5}}_{y_2}\right)$.

Luego, sustituimos en la fórmula:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\left(\frac{7}{5}\right)-\left(\frac{-2}{5}\right)}{\left(\frac{-3}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{\frac{7+2}{5}}{\frac{-3-3}{2}}=\frac{\frac{9}{5}}{-3}=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{5}\cdot\frac{1}{-\cancel{3}}=\frac{-3}{5}$$

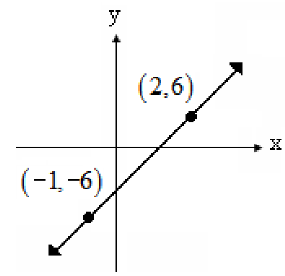
Para calcular b utilizamos el mismo procedimiento

$$y=mx+b \Rightarrow \frac{7}{5}=\left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)+b$$

$$\Rightarrow \frac{7}{5}=\frac{9}{10}+b \Rightarrow b=\frac{7}{5}-\frac{9}{10}=\frac{14-9}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

De donde la ecuación de la recta es $y=\frac{-3}{5}x+\frac{1}{2}$ o bien $y=\frac{-6x+5}{10}$.

EJEMPLO 19: Encuentre las intersecciones con los ejes de la recta que pasa por $(2,6)$ y $(-1,-6)$.



Primero encontramos la ecuación de la recta con el procedimiento usual:

$$m=\frac{6-(-6)}{2-(-1)}=\frac{12}{3}=4.$$

Y sustituyendo el punto $(2,6)$ en $y=mx+b$

$$\Rightarrow\ 6=4\cdot 2+b \Rightarrow\ 6=8+b \Rightarrow\ b=-2.$$

La ecuación de la recta es $y=4x-2$.

Recordemos que b representa la intersección con el eje y, de donde esta es $(0,-2)$ y para el eje x, debemos sustituir $y=0$ y encontrar el valor de x.

Así: $y=4x-2 \Rightarrow 0=4x-2\ \Rightarrow 2=4x \Rightarrow x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

y la intersección con el eje x es $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Una fórmula directa para b teniendo m y un punto (x_1,y_1) es $b=y_1-m\cdot x_1$.

Además, si una recta $y=mx+b$ forma un ángulo agudo α con el eje x se cumple que $|m|=\tan\alpha$ y el signo depende de si la recta es creciente o decreciente.

Ejercicio C.

I PARTE: En la siguiente tabla complete la información solicitada con respecto a la recta con ecuación dada:

	Forma estándar	Forma pendiente - intersección	Pendiente	Intersección eje y	Intersección eje x
1.	$2x+6y-3=0$				
2.	$4y-10x=6$				
3.		$y=\dfrac{-x+3}{6}$			
4.		$y=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)x+4}{3}$			
5.			$m=-4$	$(0,2)$	
6.			$m=3$		$(-1,0)$
7.				$(0,4)$	$(4,0)$
8.	$\sqrt{2}x-x+2y+4=0$				
9.	$Ax+By+C=0$; $A,B\neq 0$				
10.			$m=\dfrac{-A}{B},\ B\neq 0$		$\left(\dfrac{-C}{B},0\right)$
11.		$y=mx+b,\ m\neq 0$			
12.				$(0,b)$	$\left(\dfrac{-b}{m},0\right),\ m\neq 0$

II PARTE: Encuentre los valores de k para los cuales se cumple la proposición dada.:

1. La recta $y=kx+2$ pasa por el punto $(2,-6)$.

2. La recta $2x+ky-5=0$ pasa por el punto $(1,2)$.

3. La recta $3y-kx+5=0$ pasa por el punto $(-2,-1)$.

4. La recta $3y-5x+3=0$ pasa por el punto $(k,-1)$.

5. La recta $y+2x-k=0$ interseca el eje y en $(0,4)$

6. La recta $5y-7x+14k=0$ interseca el eje x en $(4,0)$.

7. La recta $-ky-12x+k+2=0$ interseca el eje y en $(0,6)$.

8. La recta $-ky+kx+6=0$ interseca el eje x en $(2,0)$.

9. La recta $kx-2y+5=0$ tenga pendiente igual a 5.

10. La recta $2ky-3x-6=0$ tenga pendiente igual a -3.

11. La recta $y+kx+4=0$ tenga pendiente igual a 2.

12. La recta $kx+x+8y-ky+2=0$ tenga pendiente igual a 3.

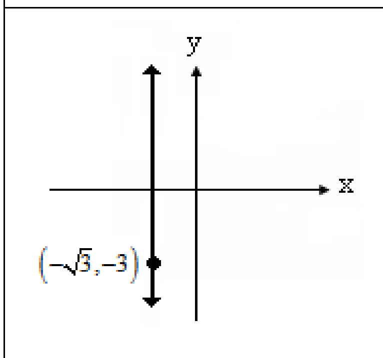
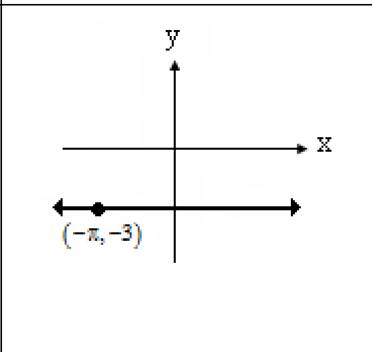
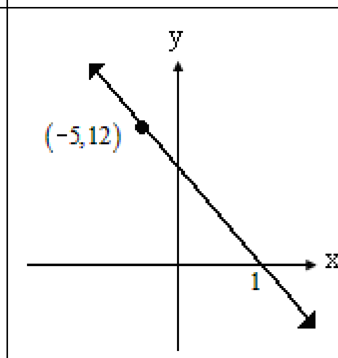
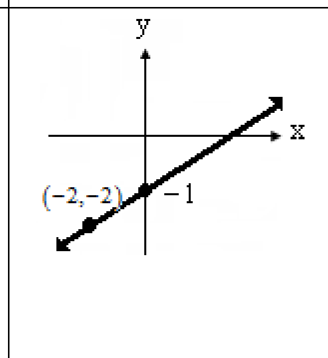
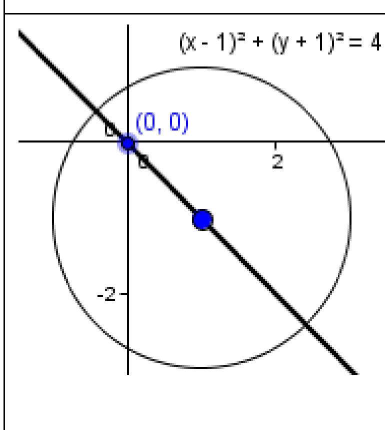
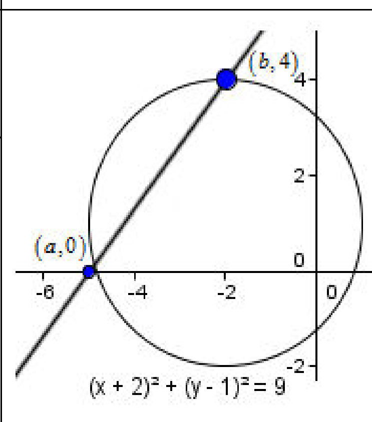
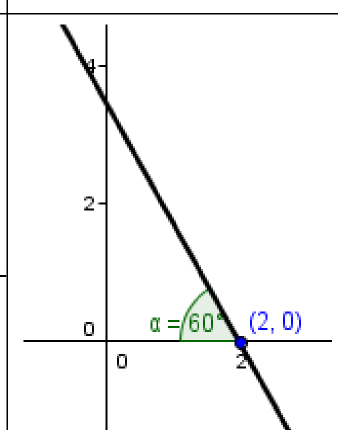
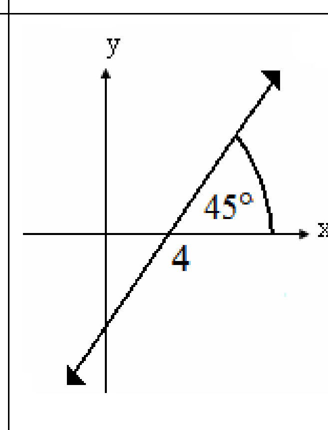
III PARTE: En cada caso, encuentre la ecuación de la recta descrita y las intersecciones con los ejes.

1. Pasa por $(2,3)$ y tiene pendiente igual a 3.
2. Tiene pendiente $\frac{-1}{5}$ y pasa por el punto $(15,-1)$.
3. Pasa por $(-2,-8)$ y $(4,8)$.
4. Pasa por los puntos $\left(\frac{1}{2},\frac{-3}{5}\right)$ y $\left(\frac{5}{2},\frac{-11}{5}\right)$.
5. Pasa por los puntos $(a,2b)$ y $(2a,-b)$.
6. Pasa por los puntos $(4a,-b)$ y $(a,-3b)$.
7. Es horizontal y pasa por el punto $(2,\sqrt{3})$.
8. Es vertical y pasa por el punto $(2,\sqrt{3})$.
9. Es decreciente, forma con el eje x un ángulo de $60°$ e interseca el eje y en $(0,3)$.
10. Es creciente, forma con el eje x un ángulo de $30°$ e interseca el eje x en $(9,0)$.
11. Es decreciente, forma con el eje x un ángulo de $45°$ y pasa por el origen.
12. Es creciente, forma con el eje x un ángulo α tal que $\tan\alpha = \frac{2}{3}$ y pasa por $(3,5)$.

IV PARTE: Encuentre la ecuación de la recta (en términos del parámetro a) que pasa por el punto dado y tiene la pendiente dada:

1. (a,a^2-3) y $m=2a$
2. $(a,a-a^2)$ y $m=1-2a$
3. (a,a^2+2a+3) y $m=2a+2$
4. $(a,4-a^2)$ y $m=-2a$

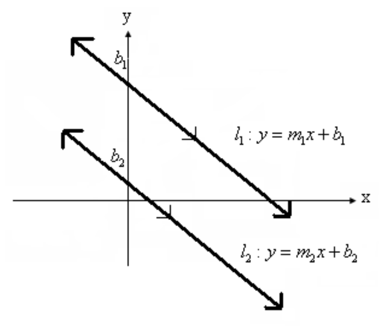
V PARTE: En las siguientes figuras encuentre la ecuación de la recta mostrada.

1.	2.	3.	4.
			
5.	**6.**	**7.**	**8.**
			

- Comparando las pendientes de las ecuaciones de dos rectas es posible determinar si estas son **paralelas** o **perpendiculares**.

D. Rectas paralelas y perpendiculares

Si dos rectas son paralelas, entonces, las pendientes deben tener el mismo signo, y además formar el mismo ángulo con respecto al eje x, por lo tanto, se puede garantizar que deben tener la misma pendiente:

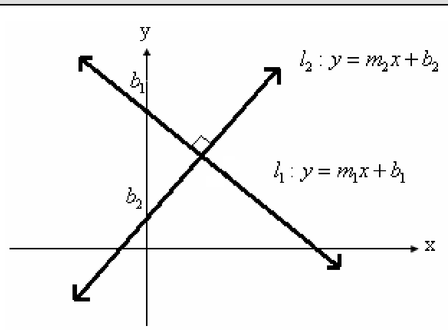


Dos rectas cuyas ecuaciones son $l_1 : y = m_1 x + b_1$ y $l_2 : y = m_2 x + b_2$ son **paralelas** si y sólo si $m_1 = m_2$.

Es claro que cualesquiera dos rectas horizontales con ecuaciones $y = a,\ y = b$ son paralelas, así como cualesquiera dos rectas verticales $x = a,\ x = b$.

EJEMPLO 20. Encuentre la ecuación de la recta paralela a $2y - 6x + 5 = 0$ que pasa por $(-3,5)$.

Dos rectas cuyas ecuaciones son $l_1 : y = m_1 x + b_1$ y $l_2 : y = m_2 x + b_2$ son **perpendiculares** si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.



Además, es claro que cualquier recta horizontal con ecuación $y = b$ es perpendicular a cualquier recta vertical con ecuación $x = a$.

EJEMPLO 21. La recta l_1 pasa por los puntos $(2,3)$ y $(-2,6)$. Encuentre la ecuación la recta perpendicular a l_1 que pasa por el punto $(4,6)$.

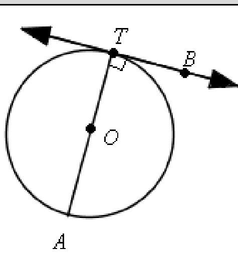
EJEMPLO 22. Encuentre el valor de k para que las rectas con ecuaciones $l : 8y - 6kx + 3x - 4 = 0$ y $n : 2y - 6x - 3k = 0$ sean perpendiculares.

En los problemas de rectas paralelas o perpendiculares, por lo general, no es necesario encontrar la intersección con el eje y de la primera recta b_1 pues solo necesitamos la pendiente m_1.

Relacionamos este tema con lo estudiado previamente sobre las circunferencias aplicando siguiente resultado fundamental de la geometría clásica:

TEOREMA: Una recta es tangente a una circunferencia si, y solo si, es perpendicular al diámetro que pasa por el punto de tangencia.

Si $\overleftrightarrow{BT}$ es tangente en $T \Rightarrow m\angle OTB = 90°$



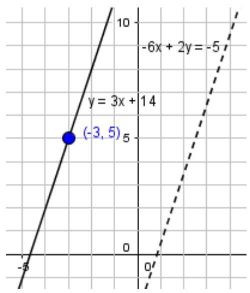
EJEMPLO 23. Para la circunferencia con ecuación $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 8$, encuentre la ecuación del diámetro que pasa por $(5,-3)$. Luego, la ecuación de la tangente en ese punto.

Soluciones D.

EJEMPLO 20: Encuentre la ecuación de la recta paralela a $2y-6x+5=0$ que pasa por $(-3,5)$

Para encontrar la pendiente de la recta que nos dan, despejamos y, entonces m_1 será el coeficiente de x en esa expresión: $2y-6x+5=0 \Rightarrow 2y=6x-5$.

$\Rightarrow y=\dfrac{6x-5}{2} \Rightarrow m_1=\dfrac{6}{2}=3$.

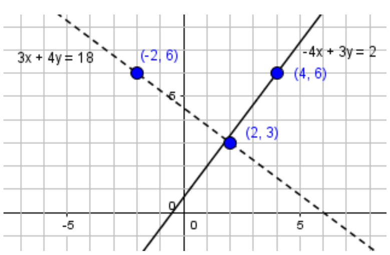


Las rectas son paralelas, entonces $m_2=3$ y utilizando $(-3,5)$ encontramos b:

$b=5-3\cdot(-3)=14$

La ecuación de la recta es $y=3x+14$.

EJEMPLO 21: La recta l_1 pasa por los puntos $(2,3)$ y $(-2,6)$. Encuentre la ecuación la recta perpendicular a l_1 que pasa por el punto $(4,6)$.



La pendiente de l_1 es : $m_1=\dfrac{6-3}{-2-2}=\dfrac{3}{-4}=\dfrac{-3}{4}$.

La pendiente m_2 satisface la ecuación $m_1\cdot m_2=-1$, porque las rectas son perpendiculares.

Entonces, $\dfrac{-3}{4}\cdot m_2=-1 \Rightarrow m_2=\dfrac{-4}{-3}=\dfrac{4}{3}$.

Calculamos b sustituyendo el punto $(4,6)$:

$\Rightarrow b=6-\dfrac{4}{3}\cdot 4=\dfrac{18-16}{3}=\dfrac{2}{3}$.

La ecuación es $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4x+2}{3}$.

- Cuando dos rectas son perpendiculares, la ecuación $m_1\cdot m_2=-1$ es equivalente a decir que la pendiente m_2 será el **recíproco opuesto** de m_1. Es decir, basta "darle vuelta" y cambiar el signo.

EJEMPLO 22: Encuentre el valor de k para que las rectas con ecuaciones $l: 8y-6kx+3x-4=0$ y $n: 2y-6x-3k=0$ sean perpendiculares.

Despejamos y en l para encontrar m_1:

$8y-6kx+3x-4=0 \Rightarrow 8y=6kx-3x+4$

$\Rightarrow y=\dfrac{6kx-3x+4}{8} \Rightarrow y=\dfrac{(6k-3)x}{8}+\dfrac{4}{8} \Rightarrow m_1=\dfrac{6k-3}{8}$.

Despejamos y en n para encontrar m_2:

$2y-6x-3k=0 \Rightarrow 2y=6x+3k \Rightarrow y=\dfrac{6x+3k}{2} \Rightarrow m_2=\dfrac{6}{2}=3$

Como las rectas son perpendiculares, $m_1=\dfrac{-1}{m_2} \Rightarrow$

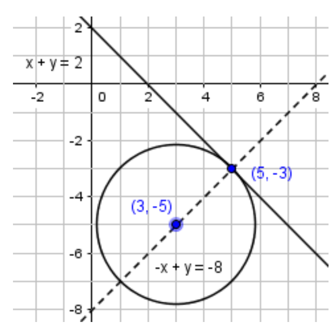
$\dfrac{6k-3}{8}=\dfrac{-1}{3} \Rightarrow 18k-9=-8 \Rightarrow 18k=1 \Rightarrow k=\dfrac{1}{18}$.

EJEMPLO 23: Para la circunferencia con ecuación $(x-3)^2+(y+5)^2=8$, encuentre la ecuación del diámetro que pasa por $(5,-3)$. Luego, la ecuación de la tangente en ese punto.

El diámetro pasa por el centro y el punto dado.

Tenemos $m_d=\dfrac{-3-(-5)}{5-3}=1$

y $b=-3-1\cdot 5=-8$.



La ecuación del diámetro es $y=x-8$.

La tangente es perpendicular a esta recta:

$\Rightarrow m_t=\dfrac{-1}{m_d}=-1$ y $b=-3-(-1)\cdot 5=2$. La ecuación es $y=-x+2$.

Ejercicio D.

I PARTE: Determine si las siguientes parejas de rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos (en cuyo caso se llaman rectas **oblicuas).**

1. $y = 2x - 4$ y $y = 2x + 1$.

2. $y = \dfrac{-3x+1}{2}$ y $y = \dfrac{-2x-7}{3}$.

3. $y = \dfrac{x}{5}$ y $y = 10 - 5x$.

4. $2y = 4x + 3$ y $y = 4x - 3$.

5. $2y - x + 1 = 0$ y $5 + 3x - 6y = 0$.

6. $y = 2$ y $x = 3$.

7. $y = \sqrt{2}$ y $y = \sqrt{5}x + 3$.

8. $3y - 5 = -9x$ y $y = \dfrac{-9}{3}x + 5$.

II PARTE: Encuentre la ecuación de la recta que:

1. Es paralela a $4y - 6x + 5 = 0$ y pasa por $(-4,10)$.

2. Es perpendicular a $6y - 2x + 5 = 0$ y pasa por $(2,6)$.

3. Es paralela a $3y - 5x + 3 = 0$ y pasa por el punto $(4,3)$.

4. Es perpendicular a $2x - 3y + 4 = 0$ y pasa por el punto $(-2,3)$.

5. Es paralela a $ax + by = 0$, con $a,\ b \neq 0$, e interseca el eje y en $(0,b)$.

6. Es perpendicular a $5x - ay = 3,\ a \neq 0$ y pasa por el origen.

7. Es paralela al eje x, y pasa por el punto $(3,\pi)$.

8. Es paralela al eje y, y pasa por el punto $(\sqrt{2},5)$.

III PARTE: Encuentre todos los posibles valores de k para los cuales:

1. Las rectas $y = 2x + 1$ y $y = kx + 3$ sean paralelas.

2. Las rectas $y = 3x - 2$ y $y = kx$ sean perpendiculares.

3. Las rectas $y = \dfrac{3x-3}{5}$ y $y = -5 + kx$ sean paralelas.

4. Las rectas $y = \dfrac{-6x}{5}$ y $y = -kx$ sean perpendiculares.

5. Las rectas $2x - 5y - 3 = 0$ y $4x - 2ky + 1 = 0$ sean paralelas.

6. Las rectas $4y - 6kx + 3x - 4 = 0$ y $ky + 2y - 6x - 3k = 0$ sean paralelas.

7. Las rectas $2y + kx - x + 2 = 0$ y $4y - kx + 8x + 8 = 0$ sean perpendiculares.

8. Las rectas $4x + 3y - 3 = 0$ y $6x - 2ky - 2y + 1 = 0$ sean perpendiculares.

IV PARTE: Resuelva los siguientes problemas.

1. Una recta paralela a $y = 2ax + 4$ pasa por $(b,2a)$, $(-1,3)$ y $(-7,b)$. Encuentre todas las parejas de valores de a y b.

2. Una recta perpendicular a $y = -\dfrac{x+4}{a}$ pasa por $(0,-1)$, (a,b) y $(-1,-b)$.

Encuentre todas las parejas de valores de a y b.

3. La recta $l: ay + bx + 1 = 0$ es perpendicular a $y = -a^2x + 4$. Calcule en términos de a la intersección de l con el eje x.

4. La recta $l: ay + bx + 1 = 0$ es paralela a $y = -ax - 1$.

Calcule en términos de a la intersección de l con el eje x.

5. Encuentre la mediatriz (recta perpendicular que pasa por el punto medio) de $\overline{MN}$ con $N(4,6)$ y $M(8,14)$.

6. Los puntos $A(0,2)$ y $B(1,0)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $\square ABCD$.

a) Encuentre la ecuación de $\overline{BC}$.

b) Encuentre la ecuación de $\overline{AD}$.

c) ¿Es posible encontrar las coordenadas del punto C? ¿Del punto D? ¿Por qué?

7. En el triángulo con vértices $A(0,4)$, $B(2,0)$ y $C(4,3)$.

a) Encuentre la pendiente de $\overline{AB}$.

b) Encuentre la pendiente de la altura sobre $\overline{AB}$.

c) Encuentre la ecuación de la altura sobre $\overline{AB}$.

d) Encuentre el punto medio de $\overline{AB}$.

e) Encuentre la ecuación de la mediatriz sobre $\overline{AB}$.

8. $\square ABCD$ es un cuadrado. Si, $A(1,8)$ y $B(3,2)$, entonces:

a) Calcule el área y el perímetro del cuadrado.

b) Encuentre la pendiente de $\overline{AB}$.

c) Encuentre la ecuación de $\overline{BC}$.

d) Si la coordenada en x del punto C es 6, calcule la coordenada en y.

e) Calcule la ecuación de $\overline{CD}$.

f) Encuentre las coordenadas del punto D.

V PARTE: Considere la circunferencia con ecuación $x^2-2x+y^2-4y=0$. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia, para encontrar la ecuación de la recta tangente en los siguientes puntos:

1. $(1-\sqrt{5},2)$

2. $(1,2+\sqrt{5})$

3. $(1,2-\sqrt{5})$

4. $(1+\sqrt{5},2)$

5. $(0,0)$

6. $(0,4)$

7. $(3,3)$

8. $(-1,1)$

VI PARTE: Considere la circunferencia con ecuación $x^2+y^2-2y=3$. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia, para encontrar la ecuación de la recta tangente en los siguientes puntos:

1. $(0,3)$

2. $(0,-1)$

3. $(-2,1)$

4. $(2,1)$

5. Encuentre los valores de x donde la circunferencia interseca el eje x.

6. Para cada punto de 5. encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en ese punto.

7. ¿Esas rectas son perpendiculares?

8. Encuentre otro punto de la circunferencia donde la tangente en ese punto, es paralela a la recta tangente a los puntos de 5.

- Para encontrar **el punto de intersección de dos rectas**, se debe plantear y resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las rectas.
- Analíticamente es posible establecer la posición de una recta respecto a una circunferencia. Esto es, determinar si es **secante, tangente o exterior.**

E. Intersección de rectas y circunferencias

El punto de intersección de dos rectas es un punto (x, y) que satisface las dos ecuaciones de las rectas al mismo tiempo. Para encontrarlo, en general, basta sustituir la expresión correspondiente a y de una de las ecuaciones, en la otra, y luego resolver para x.

Después, se encuentra la y sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones.

> En caso de que la intersección sea un punto decimos que las rectas son **concurrentes**.
>
> Sin embargo, no siempre será posible encontrar tal intersección: si el **conjunto solución es vacío**, entonces las rectas son **paralelas**.
>
> Mientras que si tenemos un **sistema dependiente** las dos ecuaciones representan la misma recta, o bien las rectas son **coincidentes**.

EJEMPLO 24. Si la ecuación de la recta l es $y = -6x + 4$, y m es una recta perpendicular a l que pasa por el punto $(-2, -6)$, encuentre el punto de intersección de la rectas l y m.

En general, podemos determinar la posición de una recta respecto a una circunferencia contando las intersecciones de la recta con la circunferencia.

Para esto se debe analizar la ecuación cuadrática que resulta al sustituir la ecuación de la recta $y = mx + b$ en la ecuación de la circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

Luego, se calcula el discriminante de la ecuación, y tenemos el siguiente resumen:

> Sea Δ el discriminante de la ecuación
>
> $$(x-h)^2 + (mx+b-k)^2 = r^2.$$
>
> Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones reales $\Rightarrow$ la recta es **secante** a la circunferencia.
>
> Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ La ecuación tiene una única solución real $\Rightarrow$ la recta es **tangente** a la circunferencia.
>
> Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones reales $\Rightarrow$ la recta es **exterior** a la circunferencia.

EJEMPLO 25. Para la circunferencia $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$, determine la posición de las siguientes rectas:

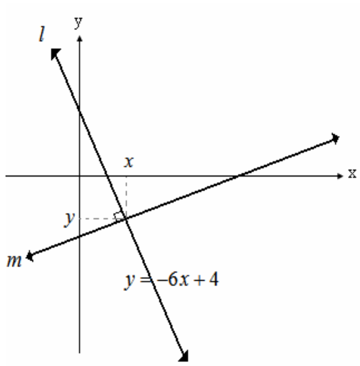
a) $y = x - 1$

b) $y = \dfrac{-x + 6 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

c) $y = -x - 3$

Soluciones E.

EJEMPLO 24: Si la ecuación de la recta l es $y=-6x+4$, y m es una recta perpendicular a l que pasa por el punto $(-2,-6)$, encuentre el punto de intersección de la rectas l y m.



Primero debemos encontrar la ecuación de la recta m, que es perpendicular a l.

Para la recta l tenemos que $y=-6x+4 \Rightarrow m_l=-6$.

Como $m_l \cdot m_m=-1 \Rightarrow -6m_m=-1 \Rightarrow m_m=\dfrac{1}{6}$.

Encontramos b sustituyendo $(-2,-6)$ en

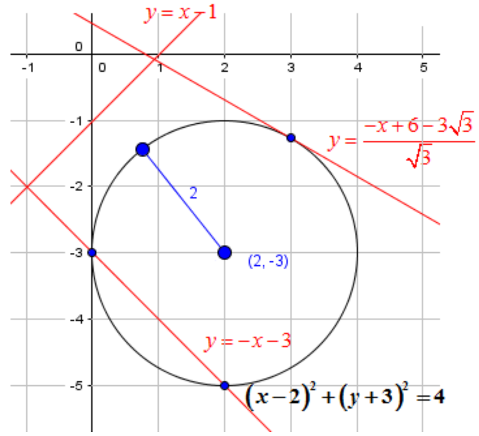
$$y=m_m x+b \Rightarrow -6=\frac{1}{6}\cdot(-2)+b \Rightarrow -6=\frac{-1}{3}+b:$$

$$\Rightarrow b=-6+\frac{1}{3}=\frac{-18+1}{3}=\frac{-17}{3}.$$

Ahora, el punto de intersección de las rectas será el conjunto solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} l: \quad y=-6x+4 \\ m: \; y=\dfrac{1}{6}x-\dfrac{17}{3} \end{cases}$.

Entonces, $\dfrac{1}{6}x-\dfrac{17}{3}=-6x+4$ de donde $x=\dfrac{58}{37}$ y sustituimos en cualquiera de las rectas para obtener $y=\dfrac{-200}{37}$, por lo que el punto de intersección es $\left(\dfrac{58}{37},\dfrac{-200}{37}\right)$.

EJEMPLO 25: Para la circunferencia $(x-2)^2+(y+3)^2=4$, determine la posición de las siguientes rectas:



a) $\boldsymbol{y=x-1}$: Sustituyendo tenemos:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4 \Rightarrow (x-2)^2+(x-1+3)^2=4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(x+2)^2=4 \Rightarrow x^2-4x+4+x^2+4x+4=4$$

$\Rightarrow 2x^2+4=0$. El discriminante de esta ecuación es $\Delta=0^2-4(2)(6)=-32<0$, por lo que la recta es **exterior.**

b) $\boldsymbol{y=\dfrac{-x+6-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$: Tenemos

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4 \Rightarrow (x-2)^2+\left(\frac{-x+6-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+3\right)^2=4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+\left(\frac{6-x}{\sqrt{3}}\right)^2=4 \Rightarrow x^2-4x+4+\frac{36-12x+x^2}{3}=4$$

$$\Rightarrow 3x^2-12x+12+36-12x+x^2=12$$

$$\Rightarrow 4x^2-24x+36=0 \Rightarrow x^2-6x+9=0$$

El discriminante de esta ecuación es:

$\Delta=(-6)^2-4(1)(9)=0$, por lo que la recta es **tangente**.

c) $\boldsymbol{y=-x-3}$: Sustituyendo tenemos

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4 \Rightarrow (x-2)^2+(-x-3+3)^2=4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(-x)^2=4 \Rightarrow x^2-4x+4+x^2=4 \Rightarrow 2x^2-4x=0$$

El discriminante de esta ecuación es:

$\Delta=(-4)^2-4(2)(0)=16>0$, por lo que la recta es **secante**

Ejercicio E.

I PARTE: Encuentre el punto de intersección de las siguientes parejas de rectas. Clasifíquelas además como rectas concurrentes, coincidentes o paralelas.

1. $\begin{cases} l: \ y = 2x+3 \\ m: \ y = x-2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} l: \ y = -2x+2 \\ m: \ y = x/2+1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} l: \ y = 3x-1 \\ m: \ y = 2x+5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} l: \ y = 0,5x+1,5 \\ m: \ y = \dfrac{x-2}{3} \end{cases}$

5. $\begin{cases} l: \ 2y+6x+6=0 \\ m: \ y = -3x-3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} l: \ 2y+4x=3 \\ m: \ y = -2x+7 \end{cases}$

7. $\begin{cases} l: \ 4y+6x=8 \\ m: \ y = \dfrac{-x-2}{3} \end{cases}$

8. $\begin{cases} l: \ y=2 \\ m: \ 4=x \end{cases}$

II PARTE: Resuelva los siguientes problemas

1. Encuentre el punto de intersección de $y=-x+1$ con la perpendicular a $4y+2x-3=0$ que pasa por $\left(1, 1/2\right)$.
2. La ecuación de la recta l es $y=2x-3$ y m es una recta perpendicular a l que pasa por el punto $(2,6)$. Encuentre el punto de intersección de la rectas l y m.
3. Si la ecuación de la recta l es $y=-4x+2$, y m es una recta perpendicular a l que pasa por el punto $(8,4)$, encuentre el punto de intersección de la rectas l y m.
4. Una recta paralela a $10y-15x+3=0$ interseca a $2x+10y=0$ en $(-5,1)$. Determine el punto de intersección de esa recta con el eje x.

III PARTE: Considere la circunferencia con ecuación $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ clasifique:

Los puntos como interiores, exteriores o sobre la circunferencia		Las rectas como secantes, tangentes o exteriores.	
1. $(0,0)$	**5.** $(-2,1)$	**9.** $x=1$	**13.** $y=-x$
2. $(0,3)$	**6.** $(1,2)$	**10.** $y=3$	**14.** $y=x+6$
3. $(-1,0)$	**7.** $(\sqrt{3}-1,3)$	**11.** $y=0$	**15.** $y=-\sqrt{3}x+6-\sqrt{3}$
4. $(0,4)$	**8.** $(\sqrt{2}-1,4)$	**12.** $x=2$	**16.** $y=2x+1$

IV PARTE: Una cadena de restaurantes tiene servicio a domicilio en dos locales cuyos centros se pueden representar en un plano cartesiano por lo puntos $O(0,0)$ y $I(10,0)$. En el primero cubren $9km$ y en el segundo $3km$ a la redonda. Una zona industrial en forma de cuadrado, tiene sus cuatro vértices en el I cuadrante. Con respecto a uno de sus lados $\overline{PQ}$ se sabe que $P\left(27/5, 36/5\right)$ está en el límite de la cobertura del primer local y que $Q(a,b)$ está en el límite de cobertura del segundo local.

1. Encuentre las ecuaciones de las circunferencias que describen la cobertura de los locales.
2. Justifique que existe una región donde se puede atender con cualquier de los dos locales.
3. Determine cuál de las siguientes casas, representadas por puntos, se pueden atender con el primer local, con el segundo, con ambos o con ninguno:

a)	$(5,5)$	**e)**	$(0,10)$
b)	$(1,1)$	**f)**	$(8,-1)$
c)	$(11,1)$	**g)**	$(12,-2)$
d)	$\left(15/2, 1/2\right)$	**h)**	$(15,1)$

4. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P tangente a la circunferencia que describe la cobertura del primer local.
5. Muestre que esa misma recta es tangente a la circunferencia que describe la cobertura del segundo local.
6. Encuentre las coordenadas del punto Q.
7. Encuentre la medida del lado de la zona industrial.
8. Encuentre las coordenadas de los otros dos vértices de la zona industrial.

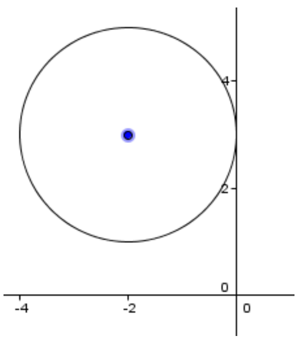
AUTOEVALUACIÓN: Geometría Analítica

I PARTE: Selección única

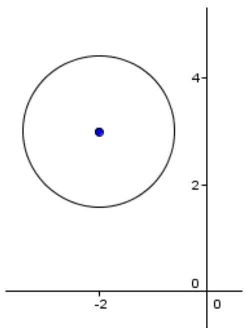
Circunferencia y fórmulas básicas

1) ¿En cuál de las siguientes opciones se muestra la circunferencia con centro en $(-2,3)$ y radio 2?

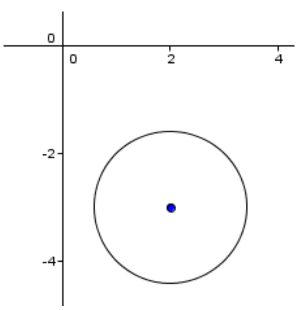
A)



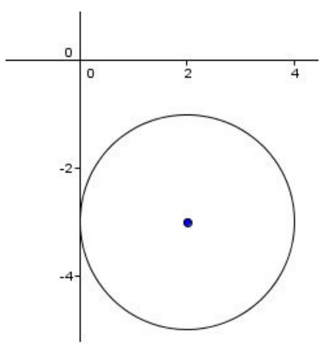
B)



C)



D)



2) La circunferencia de centro $(-1,4)$ y radio 2 tiene ecuación:

A) $(x-1)^2+(y+4)^2=2$

B) $(x-1)^2+(y+4)^2=4$

C) $(x+1)^2+(y-4)^2=2$

D) $(x+1)^2+(y-4)^2=4$

3) Un círculo de área $36\pi cm^2$, la longitud de la circunferencia corresponde a:

A) $6\pi cm$

B) $12\pi cm$

C) $18\pi cm$

D) 12

4) Considere la circunferencia de centro O que pasa por los puntos A y B. Entonces, una cuerda corresponde a:

A) $\overline{OA}$

B) $\overline{OB}$

C) $\overleftrightarrow{AB}$

D) $\overline{AB}$

5) La distancia entre los puntos $A(1,4)$ y $B(-2,5)$ es:

A) 4

B) 2

C) 10

D) $\sqrt{10}$

Ecuación de la circunferencia

6) La ecuación de la circunferencia con centro en $(-1,2)$ y que pasa por $(1,-2)$ es:

A) $(x+1)^2+(y-2)^2=20$

B) $(x-1)^2+(y+2)^2=20$

C) $(x+1)^2+(y-2)^2=\sqrt{20}$

D) $(x-1)^2+(y+2)^2=\sqrt{20}$

7) El centro y el radio de la circunferencia con ecuación $x^2+4x+y^2=0$ corresponden, respectivamente, a:

A) $(2,0), r=2$

B) $(2,0), r=4$

C) $(-2,0), r=2$

D) $(-2,0), r=4$

Rectas paralelas, perpendiculares e intersección de rectas

8) La ecuación de una recta paralela a la recta dada por $4x-5y-6=0$ es:

A) $y=\dfrac{4x}{5}+2$

B) $y=\dfrac{-4x}{5}+7$

C) $y=\dfrac{-5x}{4}-1$

D) $y=\dfrac{5x}{4}-2$

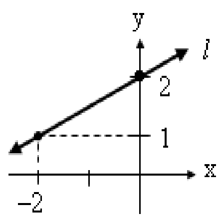
9) Sea l_1 una recta paralela a l. Si $(1,-1)$ es un punto de l_1, entonces el punto de intersección de l_1 con el eje "x" es:

A) $(0,3)$

B) $(3,0)$

C) $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$

D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$



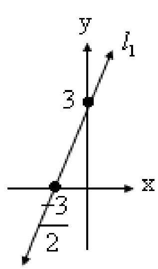
10) De acuerdo con los datos de la gráfica, si l_2 es una recta diferente de la recta l_1 y $l_1 \| l_2$, entonces una ecuación para la recta l_2 es:

A) $y=\dfrac{-x}{2}+3$

B) $y=2x-1$

C) $y=-2x-2$

D) $y=2x+3$



11) Sea l_1 y l_2 rectas paralelas entre sí. Si la recta l_1 está dada por $y=3x-2$ y l_2 pasa por el punto $(1,3)$ entonces una posible ecuación para l_2 es:

A) $y=3x$

B) $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8}{3}$

C) $y=-3x+6$

D) $y=\dfrac{-1}{3}x+\dfrac{10}{3}$

12) De las siguientes parejas de rectas, ¿cuáles no son perpendiculares?

A) $y=\dfrac{x}{2}+1$, $y=1-2x$

B) $y=x$, $y=-x+5$

C) $y=-2$, $x=4$

D) $y=\dfrac{-2x}{3}+3$, $y=\dfrac{-3x}{2}+6$

13) Sea l_1 y l_2 rectas perpendiculares entre sí. Si la recta l_1 está dada por $y=\dfrac{-7x}{3}+2$, entonces, una posible ecuación para l_2 es:

A) $y=\dfrac{3x}{7}+3$

B) $y=\dfrac{7x}{3}+3$

C) $y=\dfrac{7x}{3}+3$

D) $y=\dfrac{-3x}{7}+3$

14) Los puntos $(3,5)$ y $(5,4)$ pertenecen a la recta l_1. El punto $(2,3)$ pertenece a la recta l_2. Si l_1 es perpendicular a l_2 entonces la ecuación de l_2 es:

A) $y=\dfrac{x}{2}+1$

B) $y=2x-1$

C) $y=2x+7$

D) $y=\dfrac{-x}{2}+4$

15) La ecuación de la recta paralela a $2y-3x=-4$ que contiene el punto $(-2,0)$ es:

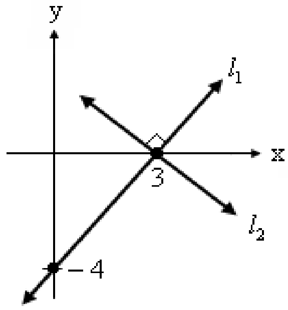
A) $y+3x=-6$

B) $3y-2x=4$

C) $3y-x=2$

D) $2y-3x=6$

16) De acuerdo con los datos de la gráfica, la ecuación de la recta l_2 es:



A) $y=-3x+4$

B) $4y=-3x+9$

C) $y=\frac{4x}{3}-4$

D) $y=\frac{4}{3}x$

17) El punto de intersección de la rectas $4x-5y=0$ y $3x-2y=1$ se ubica en el siguiente cuadrante:

A) I

B) II

C) III

D) IV

18) Si las rectas l_1 y l_2 son paralelas, l_1 contiene los puntos $(3,-5)$ y $(-9,3)$ y l_2 contiene los puntos $(1,6)$ y $(k,0)$, entonces el valor de la constante k es:

A) -3

B) $\frac{20}{3}$

C) $\frac{17}{2}$

D) 10

19) Las rectas l_1 y l_2 son paralelas. Si la ecuación de l_1 es $y=\frac{8-3x}{7}$ y la recta l_2 contiene al punto $\left(\frac{-3}{4},2\right)$, entonces la ecuación de la recta l_2 es:

A) $28y+12x=47$

B) $12y-28x=45$

C) $28y-12x=47$

D) $28y=-12x+65$

20) La intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $y-7=-5x$ y $y+9=3x$ es el conjunto:

A) $\{\ \}$

B) $\{(1,4)\}$

C) $\{(-3,2)\}$

D) $\{(2,-3)\}$

21) El punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $2x-3y-1=0$ y $4x-5y+2=0$ se ubica en el cuadrante

A) I

B) II

C) III

D) IV

Relaciones entre puntos, rectas y circunferencias

22) ¿Cuál de los siguientes puntos es exterior a la circunferencia $x^2+10x+y^2-8y=-32$?

A) $(-5,4)$

B) $(-5,1)$

C) $(-4,6)$

D) $(-4,7)$

23) Considere la circunferencia $(x+7)^2+(y-8)^2=16$. El punto $(-6,14)$:

A) Está en la circunferencia

B) Es exterior a la circunferencia

C) Es interior a la circunferencia

D) Ninguna de las anteriores

24) ¿Cuál de los siguientes puntos es exterior a la circunferencia de ecuación $(x+1)^2+(y-3)^2=9$?

A) $(-1,0)$

B) $(1,4)$

C) $(-2,5)$

D) $(2,3)$

25) Una antena parabólica se coloca en el punto $(1,-2)$ y emite una señal que se puede percibir cuatro unidades a la redonda. ¿Cuál de los siguientes puntos, donde están colocados televisores, reciben señal de esa antena?

A) $(0,2)$
B) $(5,0)$
C) $(-4,0)$
D) $(0,-5)$

26) Considere la circunferencia $(x-2)^2+(y+1)^2=12$. La recta $y+x-2=0$ es:

A) Secante a la circunferencia.
B) Tangente a la circunferencia.
C) Exterior a la circunferencia.
D) Ninguna de las anteriores.

27) La ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x-4)^2+(y-3)^2=17$ en el punto $(3,7)$ es:

A) $y=-4x+19$
B) $y=\frac{x+25}{4}$
C) $y=\frac{x}{4}+19$
D) $y=-4x+25$

28) ¿Cuál de las siguientes rectas es tangente a la circunferencia de centro $(2,3)$ y radio 2 ?

A) $x=4$
B) $y=3$
C) $y=x+1$
D) $y=6-x$

Traslación de circunferencias

29) La circunferencia de ecuación $(x+1)^2+(y+7)^2=64$ se traslada de manera que el nuevo centro es $(1,4)$. ¿Cuál es la ecuación de esta nueva circunferencia?

A) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$
B) $(x-1)^2+(y-4)^2=64$
C) $x^2+(y+3)^2=64$
D) $x^2+(y+3)^2=8$

30) Al trasladar la circunferencia de ecuación $x^2+12x+y^2-20y=0$ tres unidades hacia la derecha y dos hacia abajo, se obtiene la circunferencia de ecuación:

A) $(x+3)^2+(y-8)^2=136$
B) $(x-9)^2+(y-12)^2=136$
C) $(x+6)^2+(y-10)^2=16$
D) $(x+3)^2+(y-12)^2=16$

31) ¿Cuál traslación lleva la circunferencia de centro $(1,2)$ y radio 3 a la de ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2=9$?

A) Ninguna.
B) $(x,y-2)$
C) $(x,y-4)$
D) $(x-2,y)$

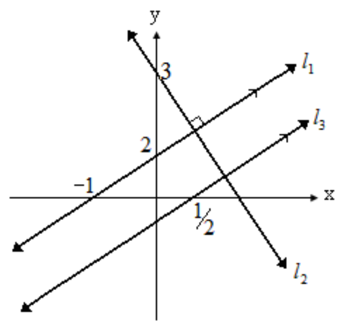
32) ¿Cuál es el menor valor de k para el cual, al trasladar k unidades a la derecha la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, esta queda tangente exteriormente a $(x-6)^2+y^2=4$?

A) $k=3$
B) $k=6-2\sqrt{2}$
C) $k=5-2\sqrt{2}$
D) $k=7+2\sqrt{2}$

II PARTE: Resuelva los siguientes problemas.

1. Considere la circunferencia de centro $O(2,-3)$ tal que la recta $14x-2y+6=0$ es tangente en un punto T. Encuentre la ecuación del diámetro que pasa por T.

2. En la figura, las rectas l_1 y l_3 son paralelas. Además, l_2 es perpendicular a ellas.



a) Encuentre la ecuación de l_1

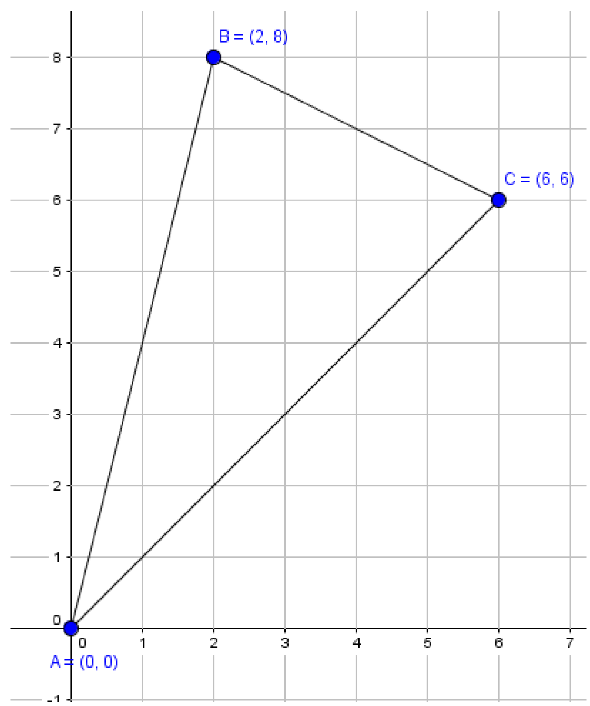
b) Encuentre la ecuación de l_2

c) Encuentre el punto de intersección de l_1 y l_2

d) Encuentre la ecuación de l_3

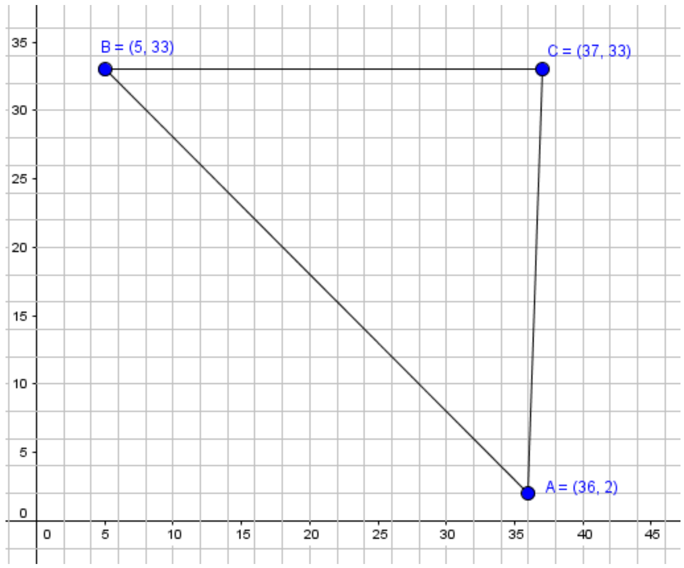
e) Encuentre el punto de intersección de l_2 y l_3.

3. Sea $A=(0,0)$, $B=(2,8)$ y $C=(6,6)$. Encuentre la ecuación del circuncírculo del ΔABC (círculo con centro en la intersección de las mediatrices que pasa por los tres vértices del triángulo).

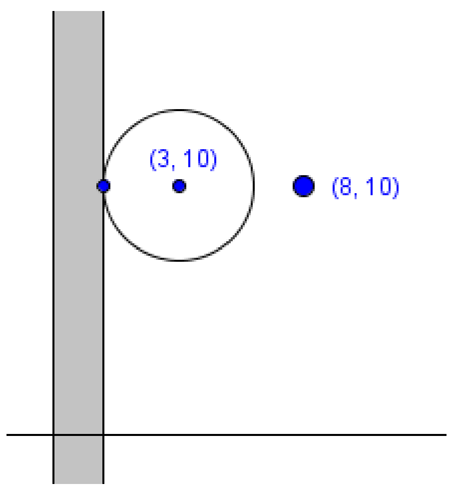


4. Una empresa de distribución de videojuegos tiene tres establecimientos localizados en los puntos del plano cartesiano $A(36,2)$, $B(5,33)$ y $C(37,33)$. Para facilitar el trabajo buscarán un local principal para manejar los inventarios de manera que esté a la misma distancia de los otros tres. ¿Dónde sería óptimo colocar el nuevo local?

SUGERENCIA: La mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de puntos P que están a la misma distancia de A que de B.



5. *** RETO:** Considere una columna con base circular como una circunferencia tangente a una recta que supondremos es el eje y. La base de la columna tiene centro en $(3,10)$. En el punto $(8,10)$ hay un observador al cual la columna le obstaculiza la visión de una parte del eje y. ¿Cuál es esa parte del eje y?



UNIDAD I. GEOMETRIA / CAPITULO I: Geometría Analítica

Ejercicio A. (4)

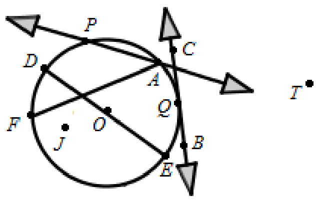
I PARTE:

1) Punto exterior
2) Punto de tangencia
3) Punto interior
4) Cuerda
5) Secante
6) Diámetro
7) Tangente
8) Cuerda
9) Radio
10) Radio

II PARTE:

1) $A = 16\pi\, cm^2, C = 8\pi cm$
2) $A = \frac{25\pi}{16} m^2, C = \frac{5\pi}{2} m$
3) $A = 6\pi m^2, C = 2\sqrt{6}\pi\, m$
4) $A = 18\pi cm^2, C = 6\sqrt{2}\pi cm$

III PARTE:



IV PARTE:

1. $C = {}^{8\pi}\!/_{3}\ cm$
2. $A = {}^{\pi}\!/_{4}$
3. $r = \frac{2\sqrt{5\pi}}{\pi} cm$
4. $A \approx 0{,}95 cm^2$
5. $A = {}^{c^2}\!/_{4\pi}$
6. $x = 5\, cm$
7. $QP = 6cm$
8. $A = \left(x^2 - 20x + 100\right)\pi\ cm^2$
9. La circunferencia se duplica y el área se cuadriplica
10. $\left(4+2\sqrt{6},2\right),\left(4-2\sqrt{6},2\right)$
11. $\left(1,2+2\sqrt{6}\right),\left(1,2-2\sqrt{6}\right)$
12. $\left(0,1+2\sqrt{3}\right),\left(0,1-2\sqrt{3}\right)$
13. $A = 20\pi$
14. $A = 18\pi$
15. $A = 18\ cm^2$

$P = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + 4$
$\approx 19{,}26\ cm$

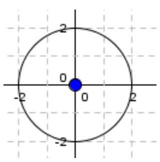
16. $A = 20$
$P = 8\sqrt{5} \approx 17{,}88$

V PARTE:

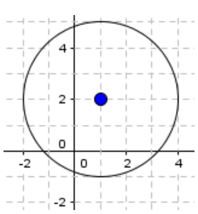
1. $O(0,0); r = 3$
2. $O(-2,0); r = 2$
3. $O(2,-1); r = 4$
4. $O(-3,-2); r = \sqrt{10}$

VI PARTE:

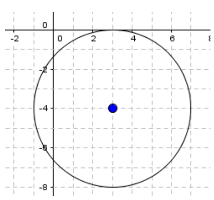
1.



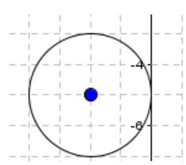
2.



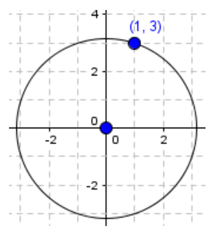
3.



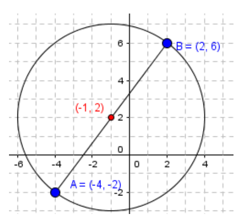
4.



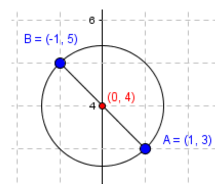
5.



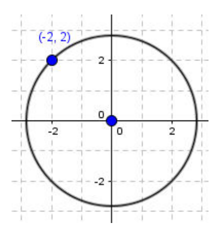
6.



7.

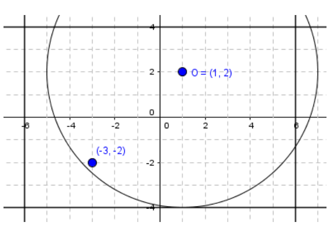


8.



VII PARTE:

1. La circunferencia de cobertura tiene radio 6.



2. En el dibujo se ve cómo hay puntos del colegio exteriores a la circunferencia que representa la cobertura de la alarma.
3. Sí, es un punto interior.
4. La diagonal del colegio mide, $\sqrt{8^2 + 12^2} \approx 14{,}42$ que es más grande que el diámetro de la circunferencia, por lo que no se puede.

Ejercicio B. (8)

I PARTE:

1. $x^2 + y^2 = 4$
2. $x^2 + 4x + y^2 - 10y = -27$
3. $x^2 + y^2 - 6y = 3$
4. $x^2 + 10x + y^2 + 6y = \dfrac{-305}{9}$
5. $x^2 - 4x + y^2 - 8y = -11$
6. $x^2 - 2\sqrt{2}x + y^2 + 2y = 2\sqrt{2}$
7. $x^2 + y^2 - 2ay = 0$
8. $x^2 - 2ax + y^2 - 2by = 0$

II PARTE:

1. Sobre la circunferencia
2. Sobre la circunferencia
3. Exterior
4. Interior
5. Exterior
6. Sobre la circunferencia
7. Interior
8. Exterior

III PARTE:

1. $(x+3)^2 + y^2 = 16$
2. $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$
3. $\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \tfrac{169}{4}$
4. $\left(x - \tfrac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 34$

IV PARTE:

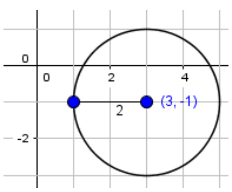
1. $r = \sqrt{5} \approx 2{,}23$
2. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 5$
3. $(-3, 0)$
4. $x = \sqrt{5} - 2$
5. $\left(\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}, 1\right)$
6. $\left(2\sqrt{5} - 2, 2\right)$
7. $OD = 2\sqrt{5}$
8. $AD = \sqrt{4\sqrt{5} + 25}$

V PARTE:

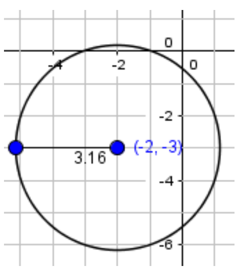
1. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$
2. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

VI PARTE:

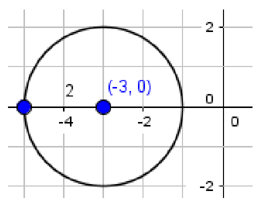
1.



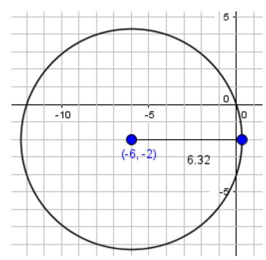
2.



3.



4.



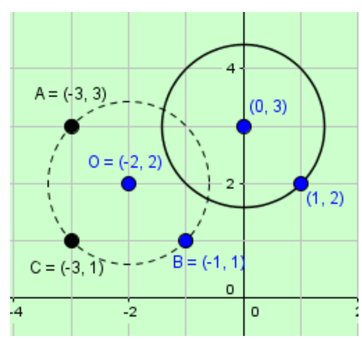
VII PARTE:

1. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$
2. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
3. $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$
4. $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 36$
5. $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 4$
6. $(x-4)^2 + y^2 = 37$
7. $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 25$
8. $x^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 5$

VIII PARTE:

1. $O(0, -1)$, $r = 1$
2. $O(5, 0)$, $r = 7$
3. $O(-3, 4)$, $r = 5$
4. $O(2, -3)$, $r = 11$
5. $O\left(\tfrac{1}{2}, 0\right)$, $r = 1$
6. $O\left(0, \tfrac{2}{3}\right)$, $r = 2$
7. $O\left(\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{2}\right)$, $r = 2$
8. $O\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}\right)$, $r = \dfrac{2}{3}$
9. $O\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)$, $r = \dfrac{1}{2}$
10. $O\left(0, \tfrac{1}{8}\right)$, $r = \sqrt{3}$
11. $O\left(\tfrac{1}{3}, 0\right)$, $r = \sqrt{5}$
12. $O\left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{10}\right)$, $r = 1$

IX PARTE:



1. $\sqrt{2}\, m \approx 1{,}41 m$
2. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$
3. 1 y 3
4. $x^2 + (y-3)^2 = 2$
5. Sí. Está en el borde.

Ejercicio C. (13)

I PARTE Forma estándar	Forma pendiente - intersección	Pendiente	Inter. eje y	Inter. eje x
$\mathbf{2x+6y-3=0}$	$y=\frac{-2x+3}{6}$	$m=\frac{-1}{3}$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},0\right)$
$\mathbf{4y-10x=6}$	$y=\frac{5x+3}{2}$	$m=\frac{5}{2}$	$\left(0,\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{-3}{5},0\right)$
$x+6y-3=0$	$\mathbf{y=\frac{-x+3}{6}}$	$m=\frac{-1}{6}$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$(3,0)$
$x-\sqrt{3}x+3y-4=0$	$\mathbf{y=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)x+4}{3}}$	$m=\frac{\sqrt{3}-1}{3}$	$\left(0,\frac{4}{3}\right)$	$\left(-2\sqrt{3}-2,0\right)$
$4x+y-2=0$	$y=-4x+2$	$\mathbf{m=-4}$	$\mathbf{(0,2)}$	$\left(\frac{1}{2},0\right)$
$-3x+y-3=0$	$y=3x+3$	$\mathbf{m=3}$	$(0,3)$	$\mathbf{(-1,0)}$
$x+y-4=0$	$y=-x+4$	$m=-1$	$\mathbf{(0,4)}$	$\mathbf{(4,0)}$
$\mathbf{\sqrt{2}x-x+2y+4=0}$	$y=\frac{x-\sqrt{2}x-4}{2}$	$m=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$(0,-2)$	$\left(-2\sqrt{2}-2,0\right)$
$\mathbf{Ax+By+C=0}$	$y=\frac{-Ax-C}{B}$	$m=\frac{-A}{B}$	$\left(0,\frac{-C}{B}\right)$	$\left(\frac{-C}{A},0\right)$
$ABx+B^2y+AC=0$	$y=\frac{-Ax}{B}-\frac{AC}{B^2}$	$\mathbf{m=\frac{-A}{B}}$	$\left(0,\frac{-AC}{B^2}\right)$	$\mathbf{\left(\frac{-C}{B},0\right)}$
$mx-y+b=0$	$\mathbf{y=mx+b,\ m\neq 0}$	m	$(0,b)$	$\left({}^{-b}/_{m},0\right)$
$mx-y+b=0$	$y=mx+b,\ m\neq 0$	m	$\mathbf{(0,b)}$	$\mathbf{\left({}^{-b}/_{m},0\right)}$

II PARTE

1. $k=-4$
2. $k=\frac{3}{2}$
3. $k=-1$
4. $k=0$
5. $k=4$
6. $k=2$
7. $k=\frac{2}{5}$
8. $k=-3$
9. $k=10$
10. $k=\frac{-1}{2}$
11. $k=-2$
12. $k=\frac{25}{2}$

III PARTE

1. $y=3x-3$
   $x:(1,0)$
   $y:(0,-3)$
2. $y=\frac{-x}{5}+2$
   $x:(10,0)$
   $y:(0,2)$
3. $y=\frac{8x-8}{3}$
   $x:(1,0)$,
   $y:\left(0,\frac{-8}{3}\right)$
4. $y=\frac{-4x-1}{5}$
   $x:\left(\frac{-1}{4},0\right),\ y:\left(0,\frac{-1}{5}\right)$
5. $y=\frac{-3bx}{a}+5b$
   $x:\left(\frac{5a}{3},0\right),\ y:(0,5b)$
6. $y=\frac{2bx-11ab}{3a}$
   $x:\left(\frac{11a}{2},0\right), y:\left(0,\frac{-11b}{3}\right)$
7. $y=\sqrt{3}$
   $x:\text{no},\ y:\left(0,\sqrt{3}\right)$
8. $x=2$
   $x:(2,0), y:\text{no}$
9. $y=-\sqrt{3}x+3,$
   $x:\left(\sqrt{3},0\right),\ y:(0,3)$
10. $y=\frac{\sqrt{3}x-9\sqrt{3}}{3}$
    $x:(9,0),\ y:\left(0,-3\sqrt{3}\right)$
11. $y=-x$
    $x:(0,0),\ y:(0,0)$
12. $y=\frac{2x}{3}+3$
    $x:\left(\frac{-9}{2},0\right),\ y:(0,3)$

IV PARTE

1. $y=2ax-a^2-3$
2. $y=\left(1-2a\right)x+a^2$
3. $y=\left(2a+2\right)x-a^2+3$
4. $y=-2ax+a^2+4$

V PARTE

1. $x=-\sqrt{3}$
2. $y=-3$
3. $y=-2x+2$
4. $y=\frac{x}{2}-1$
5. $y=-x$
6. $y=\sqrt{2}x+4+2\sqrt{2}$
7. $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$
8. $y=x-4$

Ejercicio D. (17)

I PARTE:

1. Paralelas
2. Oblicuas
3. Perpendiculares
4. Oblicuas
5. Paralelas
6. Perpendiculares
7. Oblicuas
8. Paralelas

II PARTE:

1. $y=\frac{3x+32}{2}$
2. $y=-3x+12$
3. $y=\frac{5x-11}{3}$
4. $y=\frac{-3x}{2}$
5. $y=\frac{-ax+b^2}{b}$
6. $y=\frac{-ax}{5}$
7. $y=\pi$
8. $x=\sqrt{2}$

III PARTE

1. $k=2$
2. $k=\frac{-1}{3}$
3. $k=\frac{3}{5}$
4. $k=\frac{-5}{6}$
5. $k=5$
6. $k=\frac{-3\pm\sqrt{89}}{4}$
7. $k=0$ ó $k=9$
8. $k=8$

IV PARTE

1. $a=\frac{1}{2},\ b=-3$
$//\ a=\frac{-1}{4}, b=6$

2. $a=2,\ b=3$
$//\ a=-1, b=0$

3. $(a,0)$

4. $\left(\frac{-1}{a^2},0\right)$

5. $y=\frac{-x}{2}+13$

6. **a)** $y=\frac{x-1}{2}$

b) $y=\frac{x}{2}+2$

c) No, porque no sabemos BC ni AD

7. **a)** $m=-2$

b) $\frac{1}{2}$

c) $y=\frac{x}{2}+1$

d) $(1,2)$

e) $y=\frac{x+3}{2}$

8. **a)** $A=40$, $P=8\sqrt{10}$ **b)** -3

c) $y=\frac{x}{3}+1$

d) $y=3$

e) $y=-3x+21$

f) $D(4,9)$

V PARTE:

1. $x=1-\sqrt{5}$

2. $y=2+\sqrt{5}$

3. $y=2-\sqrt{5}$

4. $x=1+\sqrt{5}$

5. $y=\frac{-x}{2}$

6. $y=\frac{x}{2}+4$

7. $y=9-2x$

8. $y=-2x-1$

VI PARTE

1. $y=3$

2. $y=-1$

3. $x=-2$

4. $x=2$

5. $x=-\sqrt{3}, x=\sqrt{3}$

6. $y=\sqrt{3}x-3,$
$y=-\sqrt{3}x-3$

7. No

8. $(\sqrt{3},2);\ (-\sqrt{3},2)$

Ejercicio E. (21)
I PARTE:

1. $(-5,-7)$
Concurrentes

2. $\left(\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right)$
Concurrentes

3. $(6,17)$
Concurrentes

4. $(-13,-5)$
Concurrentes

5. $\{(x,y)$
$/\,y=-3x-3\}$
Coincidentes

6. ϕ
Paralelas

7. $\left(\frac{16}{7},\frac{-10}{7}\right)$
Concurrentes

8. $(4,2)$
Concurrentes

II PARTE:

1. $\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)$

2. $(4,5)$

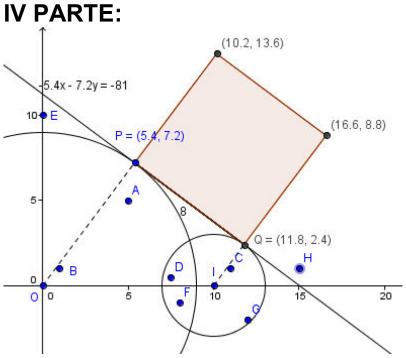
3. $(0,2)$

4. $\left(\frac{-17}{3},0\right)$

III PARTE:

1. Exterior
2. Interior
3. Sobre la circunferencia
4. Exterior
5. Interior
6. Sobre la circunferencia
7. Sobre la circunferencia
8. Exterior
9. Tangente
10. Secante
11. Tangente
12. Exterior
13. Secante
14. Exterior
15. Tangente
16. Secante

IV PARTE:



1. $x^2+y^2=81$ y
$(x-10)^2+y^2=9$

2. Las circunferencias son secantes

3.
a) Solo I
b) Solo I
c) Solo II
d) Ambas
e) Ninguna
f) Ambas
g) Solo II
h) Ninguna

4. $y=\frac{-3x+45}{4}$

5. $\Delta=0$ para
$(x-10)^2+\left(\frac{-3x+45}{4}\right)^2=9$

6. $Q\left(\frac{59}{5},\frac{12}{5}\right)$

7. 8

8. $\left(\frac{51}{5},\frac{68}{5}\right)$ y $\left(\frac{83}{5},\frac{44}{5}\right)$

AUTOEVALUACIÓN Geometría Analítica **(22)**

I PARTE:

1) A
2) D
3) B
4) D
5) D
6) A
7) C
8) A
9) B
10) B
11) A
12) D
13) A
14) B
15) D
16) B
17) A
18) D
19) A
20) D
21) C
22) D
23) B
24) C
25) D
26) A
27) B
28) A
29) B
30) A
31) C
32) C

II PARTE:

1. $y=\frac{-x-19}{7}$

2.
a) $l_1: y=2x+2$
b) $l_2: y=\frac{-x}{2}+3$
c) $l_1\cap l_2=\left(\frac{2}{5},\frac{14}{5}\right)$
d) $l_3=2x-1$
e) $l_2\cap l_3=\left(\frac{8}{5},\frac{11}{5}\right)$

3. $\left(x-\tfrac{7}{3}\right)^2+\left(y-\tfrac{11}{3}\right)^2=\tfrac{170}{9}$

4. Esto sucede en el circuncentro $(21,18)$

5. $(0,y): 4\le y\le 16$